Chapitre 18

Séries numériques

I Généralités, vocabulaire

1) Définition

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

"Étudier la série de terme général u_n" signifie étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
S_n est alors appelée "somme partielle" de la série.

Remarque : la série peut évidemment commencer depuis un rang autre que 0, et il suffit alors de changer le départ de la somme partielle.

Exemples :

1. On a vu en TD la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.

   Sa somme partielle, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ peut être encadrée, et on a montrée qu'elle est équivalente à $\ln(n)$

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Si on considère la série de terme générale $u_{n+1} - u_n$.

   Alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ est une somme télescopique et on a $S_n = u_{n+1} - u_0$.

   Ainsi, étudier la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ ou étudier la suite u_n revient donc au même.

Notation

On utilise parfois la notation $\sum u_n$ (sans même préciser ni les bornes, ni la variable de somme....) pour dire "la série de terme général u_n". On notera aussi sdtg u_n qui est généralement à préférer.

2) Nature d'une série

a) Séries convergentes, séries divergentes

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la sdtg u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est appelée "somme des u_n" (parfois de la série) et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, on dit que la série est divergente.

Remarque : le n est bien sûr une variable muette, et si la série $\sum u_n$ est convergente, on peut aussi bien écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Cette deuxième notation arrivera assez souvent du fait que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exemple :

1. La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, car $S_n \sim \ln(n)$ et $\lim \ln(n) = +\infty$.
2. Soit $q \in]-1, 1[$ et q^n. On s'intéresse à la série $\sum q^n$:

Définition 3

Soit $\sum u_n$ une série convergente, de somme S.
On appelle "reste de la série" la suite définie par $R_n = S - S_n$.
On la note habituellement $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Propriété 1

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

▷ *Preuve :* Par définition, $R_n = S - S_n$ avec $S_n \to S$, donc $R_n \to 0$

◁

b) Combinaisons linéaires

Propriété 2

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

▷ *Preuve :*

◁

Danger ! *Le piège de la somme !*

La propriété ci dessus demande explicitement que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes pour pouvoir utiliser le résultat. Si on ne sait pas la convergence, on ne scinde jamais en deux une somme (on verra des exemples en TD)

c) Condition nécessaire de convergence

Théorème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$

▷ *Preuve :*

◁

Danger ! *Condition nécessaire mais pas suffisante !*

La réciproque de cette phrase est fausse : si $u_n \to 0$ on n'a pas forcément $\sum u_n$ convergente !!!!!

On a vu l'exemple de $\sum \frac{1}{n}$ qui est divergente, et pourtant $\frac{1}{n} \to 0$.

Néanmoins, regarder $\lim u_n$ est un indice : si u_n ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge "grossièrement".

Exemple

- Si $|q| > 1$, alors la suite q^n diverge, si $q = 1$, $\lim q^n = 1$ et si $q = -1$ la suite diverge également.
  Dans tous les cas, si $|q| \geq 1$, q^n ne converge pas vers 0, donc si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge.
- Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{3n+2}{n+3}$

II Convergence des séries à termes positifs

1) Préambule

On considère une série $\sum u_n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
Par rapport à une série quelconque, l'avantage est que la somme partielle est croissante, ainsi :

1. Si S_n est majorée, $\sum u_n$ converge
2. Sinon, la série diverge avec $\lim S_n = +\infty$.

Cela permet d'obtenir les outils suivants, très utiles en pratique :

2) Critères de convergences

a) Critère de comparaison

Théorème 2

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **positives** telles que, APCR, $u_n \leq v_n$.*
Alors :

1. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge*

▷ *Preuve :*

◁

Exemples :

— Soit $v_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$. On s'intéresse à $\sum v_n$. Pour $n \geq 2$, comme $n \geq \ln(n)$, on a $\dfrac{1}{n} \leq v_n$. Les suites sont toutes les deux positives, et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison, $\sum v_n$ diverge.

— Étudier la nature de la SDTG $u_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$

b) Critère de négligeabilité

Théorème 3

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **positives** telles que $u_n = o(v_n)$.*
Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge également

▷ *Preuve* : admis. L'idée est proche de celle de la preuve du critère de comparaison. ◁

c) Critère d'équivalence

Théorème 4

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **positives** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

▷ *Preuve* : On la fait après l'absolue convergence.

◁

Exemple :
Étudier la nature de la SDTG $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

3) Absolue convergence

a) Décomposition de suite en deux suites à termes positifs

Toute suite peut se décomposer en une différence de deux suites à termes positifs, ce qui permet d'utiliser nos résultats précédents dans certains cas de suites pas à termes positifs :
En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n^+ = max(0, u_n)$ et $u_n^- = -min(0, u_n)$.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^-, \text{ et } u_n^+ \geq 0 \text{ et } u_n^- \geq 0$$

Exemple :
pour $u = (0, 1, -2, 3, 4, -5, ...)$, on a $u^+ = (0, 1, 0, 3, 4, 0, ...)$ et $u^- = (0, 0, 2, 0, 0, 5, ...)$

b) Absolue convergence

Définition 4

On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente

▷ *Preuve :*

◁

Exemple
Étudier la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = \cos(n)\dfrac{1}{2^n}$.

III Séries usuelles

1) Séries géométriques et dérivées géométriques

Théorème 6

Les séries $\sum q^k$, $\sum kq^{k-1}$, $\sum k(k-1)q^{k-2}$ *sont convergentes si et seulement si* $|q| < 1$
On a alors :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ *(on parle de série géométrique)*
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ *(on parle de série géométrique dérivée)*
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ *(on parle de série géométrique dérivée d'ordre 2)*

▷ *Preuve :* Remarquons déjà que si $|q| \geq 1$ les séries sont grossièrement divergentes. Si convergence il y a, c'est donc forcément pour $|q| < 1$.

1. Calcul déjà effectué.

2.

3. Même raisonnement en dérivant deux fois la fonction f précédente.

◁

2) Séries de Riemann

Définition 5

On appelle série de Riemann toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(fixé)*

Exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann (avec $\alpha = 1$)

⚠ : attention à ne pas confondre avec les sommes de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$ qui ne sont pas (en général) des séries....

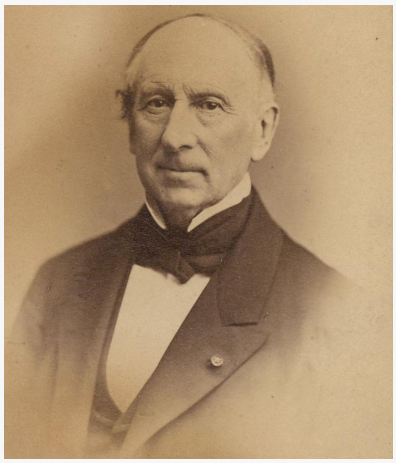
Théorème 7

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$

▷ *Preuve :*

? Le saviez-vous ? *Augustin Louis Cauchy*

Si en ECG le nom associé aux séries est principalement Riemann, c'est à Augustin Louis Cauchy (1789- 1857) que l'on doit les travaux fondateurs de la théorie des séries.



Chercheur extrêmement prolifique, polytechnicien, ingénieur, mathématicien, professeur dans plusieurs établissements de prestige, ses résultats sont utilisés dans énormément de domaine des mathématiques, que ce soit l'analyse, l'algèbre mais aussi les probabilités.

C'est en fait lui qui étudie le premier les séries que l'on appelle aujourd'hui "séries de Riemann" et qui en donne le critère de convergence, 5 ans avant la naissance de Riemann !

Bien que Cauchy soit aujourd'hui considéré comme un des plus grands mathématiciens de l'histoire, ses positions politiques (royaliste, traditionaliste et antilibérale) lui ont causé quelques difficultés et des inimitiés fortes.

3) Série exponentielle

Théorème 8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

▷ *Preuve* : Admise pour le moment (cf chapitre développements limités) ◁

IV Exemples d'étude

1) Travailler par comparaison, équivalence, ou négligeabilité :

a) Utilisation de comparaison :

Soit $u_n = \dfrac{n-1}{n^3}$

On a $u_n = \dfrac{n}{n^3} - \dfrac{1}{n^3} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} \leq \dfrac{1}{n}^2$

Or u_n est positive et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc $\sum u_n$ converge.

b) Utilisation d'équivalence

Avec le même u_n que l'exemple précédent, on a $u_n \sim \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n}^2$

C'est une SATP, équivalente à une série de Riemann convergente, donc elle converge par critère d'équivalence.

c) Utilisation de négligeabilité

Soit $u_n = ne^{-n}$.
On peut effectuer ce qu'on appelle un "test de Riemann" pour étudier $\sum u_n$, en multipliant u_n par un n^α bien choisi :

2) Avec des sommes téléscopiques

Soit $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$

3) En "bidouillant" avec les sommes usuelles

Soit $u_n = \frac{n^2+1}{n!}$

4) Avec des comparaisons séries intégrales

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}.$$